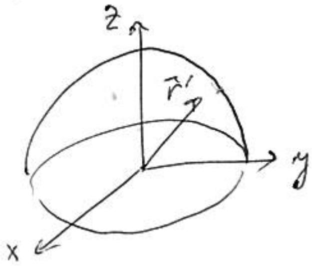
Понављање електромагнетизма

1. Полусфера радијуса R равномерно је површински наелектрисана, наелектрисањем $\sigma > 0$. Наћи јачину електричног поља $\vec{E}(0)$ у центру сфере.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dV'} \qquad \rho(\vec{r}\,')\,dV' \to \sigma(\vec{r}\,')\,dS' \to \lambda(\vec{r}\,')\,dl'$$



$$\vec{E}(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma(0-\vec{r}\,')}{r'^3}\underbrace{R^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'}_{dS'}$$

dS' елемент површине!

$$r' = R \qquad \vec{r}\,' = R\,\vec{e}_{r'}$$

$$\vec{E}(0) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma R\vec{e}_{r'}}{\cancel{R^3}}\cancel{R^2}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

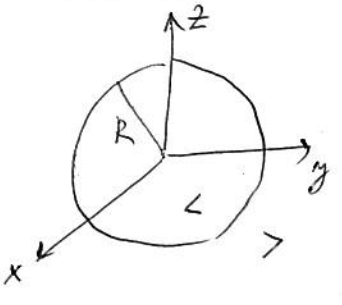
$$\vec{e}_r = \vec{e}_x\sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_z\cos\theta$$

$$\vec{E}(0) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(\cancel{\vec{e}_x\sin\theta\cos\varphi}^{\,0} + \cancel{\vec{e}_y\sin\theta\sin\varphi}^{\,0} + \vec{e}_z\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z\int_{\pi/2}^{0}(-\cos\theta)\,d\cos\theta = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z\,\frac{1}{2} = \boxed{-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{e}_z}$$

2. Лопта радијуса R наелектрисана је запремински по закону $\rho(\vec{r}) = \alpha r^2$ (r - растојање од центра лопте). Наћи јачину електричног поља и потенцијал у свакој тачки простора.

$$\boxed{\oint_{\partial V}\vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,dV} \qquad \text{Гаусов закон}$$



$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{e}_r$ из симетрије

област „>" за $r > R$; област „<" за $r < R$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} E_<(r)\,\vec{e}_r, & r < R \\ E_>(r)\,\vec{e}_r, & r \geq R \end{cases}$$

„<“: $E_<(r)\cdot 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho(r')\, r'^2\sin\theta\, dr'd\theta d\varphi$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\; 4\pi\int_0^r \alpha r'^2\cdot r'^2 dr' = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\alpha\,\frac{r^5}{5}$$

$$E_<(r) = \frac{\alpha r^3}{5\varepsilon_0}$$

„>“: $E_>(r)\cdot 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho(r')\, r'^2\sin\theta\, dr'd\theta d\varphi$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\; 4\pi\int_0^R \alpha\, r'^4 dr' = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\alpha\,\frac{R^5}{5}$$

$$E_>(r) = \frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{\alpha r^3}{5\varepsilon_0}\vec{e}_r, & r<R \\ \frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r, & r\geq R\end{cases}}$$

$\vec{E} = -\nabla\phi$ сферне координате: $\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$

$$\phi = \begin{cases}\phi_<(r), & r<R\\ \phi_>(r), & r\geq R\end{cases}$$

$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r \Rightarrow \quad E(r) = -\frac{d\phi}{dr} \Rightarrow \underline{d\phi = -E(r)dr}$

$\phi(\infty) = 0$

„<“ $\int_r^\infty d\phi = -\int_r^\infty E(r')dr' \Rightarrow \cancel{\phi(\infty)}^{\,0} - \phi_<(r) = -\int_R^\infty E_>(r')dr' - \int_r^R E_<(r')dr'$

$$\phi_<(r) = \int_R^\infty \frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0 r'^2}dr' + \int_r^R \frac{\alpha r'^3}{5\varepsilon_0}dr' = -\frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0 r'}\Big|_R^\infty + \frac{\alpha r'^4}{20\varepsilon_0}\Big|_r^R$$

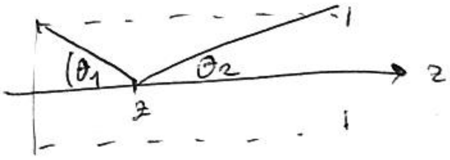
$$= \frac{\alpha R^4}{5\varepsilon_0} + \frac{\alpha R^4}{20\varepsilon_0} - \frac{\alpha r^4}{20\varepsilon_0} = \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0} - \frac{\alpha r^4}{20\varepsilon_0}$$

„>“ $\int_r^\infty d\phi = -\int_r^\infty E_>(r')dr' \Rightarrow \cancel{\phi(\infty)}^{\,0} - \phi_>(r) = -\int_r^\infty E_>(r')dr'$

$$\phi_>(r) = \int_r^\infty E_>(r')dr' = \int_r^\infty \frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0 r'^2}dr' = -\frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0 r'}\Big|_r^\infty = \frac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0} - \dfrac{\alpha r^4}{20\varepsilon_0}, & r<R \\ \dfrac{\alpha R^5}{5\varepsilon_0 r}, & r\geq R \end{cases}}$$

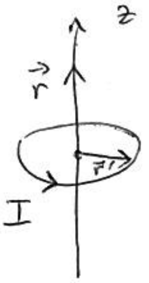
3. а) Кроз соленоид који има N навојака по јединици дужине тече струја I. Показати да је магнетно поље на оси соленоида $B_z = \dfrac{\mu_0 N I}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$, где су θ_1 и θ_2 углови дати на слици.



б) Ако је дужина соленоида L и радијус a, показати да је близу осе и близу центра соленоида магнетно поље скоро паралелно оси, али постоји и мала радијална компонента $B_r \approx \dfrac{24\mu_0 I N a^2}{L^4} r z$. Координата z је мерена од центра соленоида ($z \ll L$, $z \ll a$, $L \ll \infty$, $L \gg a$).

а) Био Саваров закон $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_V \dfrac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV'}$ $\quad \vec{j}(\vec{r}\,')dV' \to \vec{i}(\vec{r}\,')dS' \to I d\vec{l}\,'$

Магнетно поље од једног навојка:

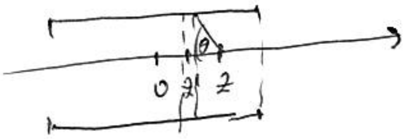


$$\vec{B}(z\vec{e}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l}\,' \times (z\vec{e}_z - \vec{r}\,')}{|z\vec{e}_z - \vec{r}\,'|^3} \quad ; \ \vec{r}\,' = R\vec{e}_r$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I R\vec{e}_{\varphi'} \times (z\vec{e}_z - R\vec{e}_{r'})}{(z^2+R^2)^{3/2}}\, d\varphi'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I R \int_0^{2\pi} (\underbrace{z\vec{e}_{r'}}_{0} + R\vec{e}_z)\frac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}}\, d\varphi'$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{2(z^2+R^2)^{3/2}}} \qquad \boxed{R=a}$$



Допринос магнетном пољу од дела соленоида дебљине dz', који се налази у z'.

број контура у дужини dz'

$$dB(z) = \frac{\mu_0 a^2 I N dz'}{2\left((z-z')^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 a^2 I N}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\left((z-z')^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{tg\,\theta = \frac{a}{z-z'} \quad \text{смена}} \qquad z-z' = a\,ctg\,\theta \;;\; dz' = \frac{a}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 a^2 I N}{2} \int \frac{a}{\sin^2\theta}\,d\theta \,\frac{1}{a^3\left(ctg^2\theta+1\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I N}{2a^2} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} \sin\theta\, d\theta = \boxed{\frac{\mu_0 I N}{2}\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{2}\left(\cos\theta_1+\cos\theta_2\right)\vec{e}_z}$$

б) $\frac{z}{L} \ll 1$; $\frac{z}{a} \ll 1$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Амперова теорема $\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B_\varphi = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad B_z = B_z(z) \text{ није ф-ја од } r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -r\frac{dB_z}{dz} \Rightarrow rB_r = -\frac{r^2}{2}\frac{dB_z}{dz} + const.$$

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz} + \cancel{\frac{const}{r}}^{\,0} \qquad B_r(r=0) = 0$$

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu_0 I N}{2}\left(\frac{z+L/2}{\left(a^2+(z+L/2)^2\right)^{1/2}} + \frac{L/2-z}{\left(a^2+(L/2-z)^2\right)^{1/2}}\right)\right)$$

$$B_r = -\frac{\mu_0 I N r}{4}\frac{d}{dz}\left(\left(1+\left(\frac{a}{z+L/2}\right)^2\right)^{-1/2} + \left(1+\left(\frac{a}{L/2-z}\right)^2\right)^{-1/2}\right)$$

$$= +\frac{\mu_0 I N r}{8}\left(\left(1+\left(\frac{a}{z+L/2}\right)^2\right)^{-3/2}\cdot(-2)\left(z+\frac{L}{2}\right)^{-3}a^2 + \left(1+\left(\frac{a}{\frac{L}{2}-z}\right)^2\right)^{-3/2}(-2)\left(\frac{L}{2}-z\right)^{-3}a^2(-1)\right)$$

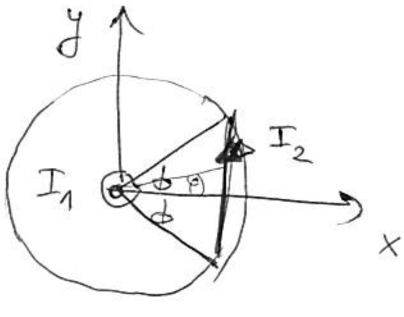
$$= \frac{\mu_0 I N r}{8}(-2)\frac{8}{L^3}a^2\Bigg[\Big(1+\left(\tfrac{2a}{L}\right)^2\underbrace{\left(1+\tfrac{2z}{L}\right)^{-2}}_{\approx 1}\Big)^{-3/2}\left(1+\frac{2z}{L}\right)^{-3}$$

$$-\Big(1+\left(\tfrac{2a}{L}\right)^2\underbrace{\left(1-\tfrac{2z}{L}\right)^{-2}}_{\approx 1}\Big)^{-3/2}\left(1-\frac{2z}{L}\right)^{-3}\Bigg]$$

$$\approx \frac{\mu_0 I N r}{\cancel{8}}\frac{(\overset{2}{\cancel{-16}})a^2}{L^3}\left[\underbrace{\left(1+\left(\tfrac{2a}{L}\right)^2\right)^{-3/2}}_{\approx 1}\left(\cancel{1}-\frac{6z}{L}-\cancel{1}-\frac{6z}{L}\right)\right]$$

$$\approx \frac{24\mu_0 I N r a^2}{L^3}\frac{z}{L} = \boxed{\frac{24\mu_0 I N a^2 r z}{L^4}}$$

4. Кроз рам који се састоји од дела кружнице централног угла $2(\pi-\phi)$ и дужи која спаја крајеве кружнице тече струја I_2. Радијус кружнице је a. Нормално на раван ~~кружнице~~ рама, кроз центар кружнице, пролази дуг проводник кроз који тече струја I_1. Наћи момент силе који делује на рам.



$$\oint_{\partial S}\vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0\int_S \vec{J}\,d\vec{S}$$ Амперов закон

магнетно поље проводника I_1 $\quad \vec{B}_1 = B_1(r)\vec{e}_\varphi$

$$B_1(r)\cdot 2r\pi = \mu_0 I_1 \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2r\pi}\vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{M} = \vec{r}\times d\vec{F} = \vec{r}\times(I_2\,d\vec{l}_2\times\vec{B}_1) \qquad \vec{F} = q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B} = \int dV(\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B})$$

$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ $\qquad \vec{M}_1$ – момент на кружном делу рама, $\vec{M}_2$ момент на дужи

$$\vec{M}_1 = \int a\vec{e}_r\times\left(I_2\,a\vec{e}_\varphi\times\frac{\mu_0 I_1}{2a\pi}\vec{e}_\varphi\right)d\varphi = 0$$

$$\vec{M}_2 = \int_{-a\sin\phi}^{a\sin\phi}\vec{r}\times\left(I_2\,dy\,\vec{e}_y\times\frac{\mu_0 I_1}{2r\pi}\vec{e}_\varphi\right) = \int_{-a\sin\phi}^{a\sin\phi}\cancel{r}\vec{e}_r\times\left(I_2\,dy\,\vec{e}_y\times\frac{\mu_0 I_1}{2\cancel{r}\pi}(-\sin\varphi\,\vec{e}_x+\cos\varphi\,\vec{e}_y)\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_{-a\sin\phi}^{a\sin\phi}(\cos\varphi\,\vec{e}_x+\sin\varphi\,\vec{e}_y)\times\vec{e}_z\sin\varphi\,dy$$

$$\vec{M} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-a\sin\phi}^{a\sin\phi} \left(-\cos\varphi\,\vec{e}_y + \sin\varphi\,\vec{e}_x\right)\sin\varphi\,dy \qquad \frac{y}{a\cos\phi} = tg\,\varphi$$

$$dy = a\cos\phi\,\frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-\phi}^{\phi} \left(-\cos\varphi\,\vec{e}_y + \sin\varphi\,\vec{e}_x\right)\sin\varphi\; a\cos\phi\,\frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\, a\cos\phi \int_{-\phi}^{\phi} \left(\underbrace{\cancel{-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\vec{e}_y}}_{0} + \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,\vec{e}_x\right) d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\cancel{2}\pi}\, a\cos\phi\, \left(\cancel{2}\,tg\,\phi - \cancel{2}\phi\right)\vec{e}_x = \boxed{\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\, a\cos\phi\,\left(tg\,\phi - \phi\right)\vec{e}_x}$$